Contest 5 by Abracadabra

比赛概况

预期难度：D<F<B<E<AG<C

- 实际情况

题号	通过	提交
A	0	6
B	18	98
C	8	25
D	56	234
E	26	342
F	23	62
G	1	10

比赛概况

- 题数分布

通过题数	人数
5	6
4	9
3	7
2	6
1	29

D. Naive Problem

题意:

- 找一个不超过m的数p使得p xor n最大。

Solution:

- 按位枚举，从高到低判断n在这一位是1还是0.
- 第i位是0并且2^m + ans ≤ m，就把ans加上2^i.
- 总的时间复杂度log m.

F. Bulbasaur and Exciting Number

- 题意:
- 定义x的数位和s(x)为“x每一位数字之和”，求一个区间内有多少整数x满足

- Solution:
- 枚举x的复杂度是O(R-L)，太大。
- 换一个角度思考：枚举s(x)，复杂度只要O(log(MAX))，把左边的值（也就是x）算出来以后再算一下数位和，看是否相等即可。

B. Sum of Different Powers

- 求在闭区间[x, y]中，有多少个数在b进制下，能由k个1和若干0表示。
- 这道题是区间相减的套路，[0, y] – [0, x-1]

B. Sum of Different Powers

- 求[0, x]之间的解的个数ans，先将x以b进制表示，之后从最高位开始依次对数位进行判断(最低位记为第0位)
- 对于第i位而言：
  - 该位大于1：ans += C_{i+1}^{k}； return ans;
    - 如x=3021最高位(第3位)是3，那么[0,x]之间最大的由1和0组成的数是1111，共(3+1)个1，从中选k个1，ans += C_4^k，由于此时已包含了所有[0,x]的情况，可直接返回。
  - 该位等于1：ans += C_i^k； k--; 继续判断下一位
    - 如x=1123，分最高位是否取1两种决策，也就是分成[0, 1000)，[1000, 1123]两个区间讨论
      - 在第一个区间中，显然有C_3^k个解，ans += C_3^k
      - 在第二个区间中，由于最高位已经取1，相当于判断[0,123]中由k-1个1组成多少解
  - 该位等于0：继续下一位

B. Sum of Different Powers

- 终止状态:
- k==0: 说明k个1已经取完了，注意ans需+1
- k!=0 && i<0: 直接return ans

- PS
- 也可以认为k>i+1时就终止，因为此时肯定无解了
- 不过本题的组合数用杨辉三角形生成，即初始置0的二维数组f[31][31]，f[i][0]=1，f[i][j] = f[i-1][j-1] + f[i-1][j](1<= j <=i)，j>i时f[i][j]=0，所以即使不判断k>i+1也不会对答案造成影响
- PPS 此解不是标程，标程的做法绕了点弯路，就不多说了

E. Friend Boy

- 这道题好像有模板，原谅弱弱的我不知道（跑得都比我快）
- 似乎有很多人wa了=v=（卡模板？！）
- 题意：n个点，求最远两点间的距离
- 最远的两点肯定在凸包上，而不在内部
- 凸包上最远的两点肯定是对踵点对
- 对踵点对：过这两点做一平行线，凸包上所有点都在这对平行线里面

- 先求凸包
- 然后把凸包的最低点和最高点取出来，做平行线，然后旋转平行线，直到和凸包的某一边重合，得到新的点，再求出新的距离，更新最大值。

C. Perfect Number

- 完美数是能被自身所有非零数字整除的数
- 求给定闭区间[L，R]内完美数的个数

C. Perfect Number

- 数位动态规划
- 整除所有非零数字，即整除它们的lcm，最大的lcm是2520
- dp[i][j][k]表示前面i位，对2520取模为j，非零数字的lcm为k的数的个数。
- 空间优化：考虑到非零数字的lcm必定是2520的一个约数，因此第三维大小可以缩减到2520约数的个数，共48个。
- 统计[1, R]，[1, L-1]的完美数个数，相减即为答案。

C. Perfect Number

- 数位dp可以用一个dfs记忆化搜索实现，参数记录当前状态：当前数位C，模2520的余数M，数字的lcm L.
- 终态：处理完所有数位，若M能被L整除，则返回1
- 在dfs函数中添加一个flag参数，表示是否对当前位从0-9的所有数字进行处理，如果是，结果才写入dp数组中。

G. Fencing Sheep

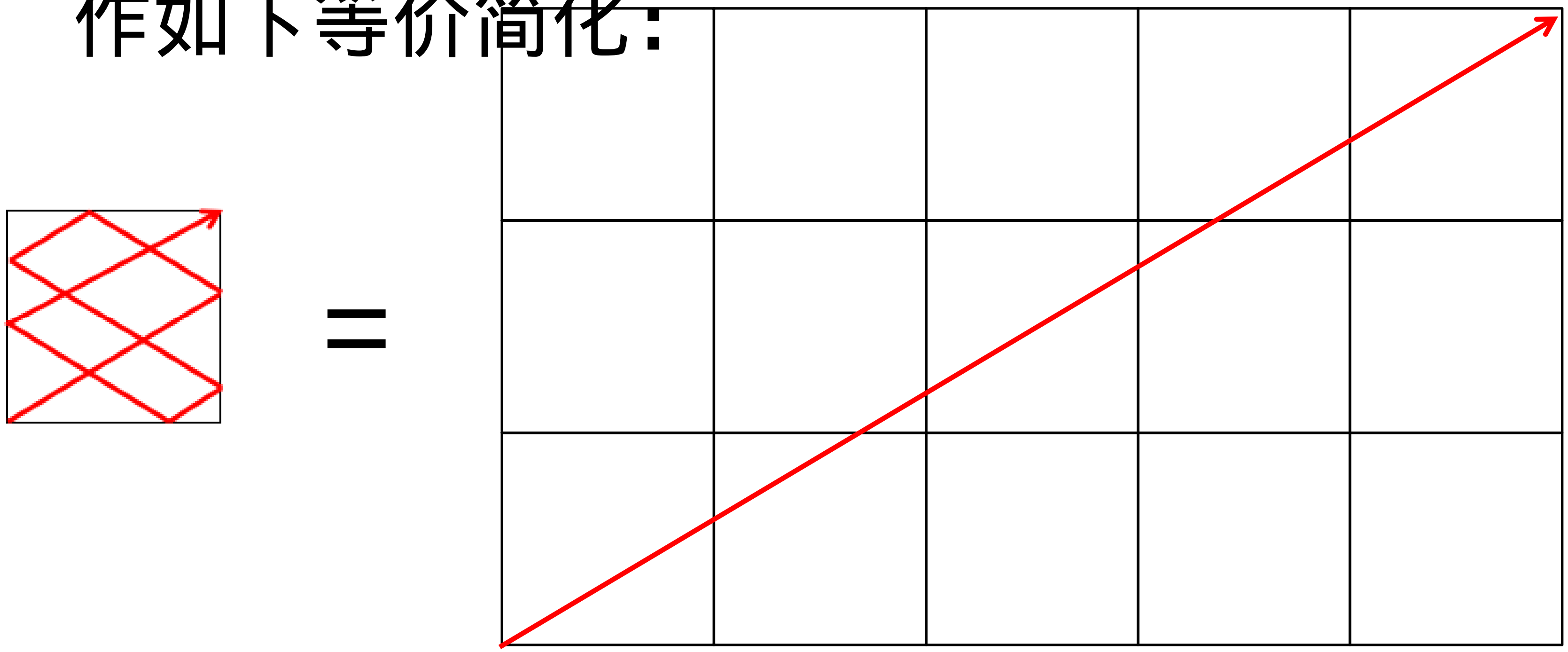
- 给定平面上m个点，从原点为圆心，半径为r的圆上从(r,0)开始的n个等距点中选取一个点集构成凸多边形包围所有点，求凸多边形最小面积。
- 将凸多边形视为有向边组成的环，对面积的贡献为边与圆心组成的有向三角形面积。
- 枚举凸多边形其中一个点，用O(n^2)的DP求解。
- 总复杂度为O(n^3)。

A. Bulbasaur and Laser

- 题意:
- 有一个长方形盒子，长宽分别为 A，B，内壁全部是镜面。盒子的左下方有一支激光笔，可以照向盒子内的任意角度。现在打开这个激光笔，但是光线要按照如下规则照射:
- 这束光必须恰好在盒子边缘反射 D 次，并且不能碰到任意一个角落（除了出发点以及结束点）。
- 这束光必须到达盒子右上角，并且结束反射。
- 求所有合法光路的长度平方和 mod 10^9+7.

A. Bulbasaur and Laser

- Solution:
- 根据初中物理我们知道，光反射的图可以作如下等价简化:



A. Bulbasaur and Laser

- Solution:
- 光线碰到一条线，就是反射一次。问题就变为:
- 光线要碰到D次线，而且在到达终点之前不能碰到格点。

- 首先容易得知，如果D为奇数则无解。如果D为偶数，光要碰到线D次，我们可以这样讨论:
- 光碰到水平线D次，竖直线0次；碰到水平线D-2次，竖直线2次；...；碰到水平线0次，竖直线D次。

A. Bulbasaur and Laser

- Solution:
- 这样容易得到光路总长:

$$\left((D+1)\sqrt{(\tfrac{1}{D+1}A)^2+B^2}\right)^2+\left((D-1)\sqrt{(\tfrac{3}{D-1}A)^2+B^2}\right)^2+\ldots$$
$$+\left(p\sqrt{(\tfrac{D+2-p}{p}A)^2+B^2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{((D+1)A)^2+B^2}\right)^2$$
$$=(1^2+3^2+\ldots+(D+1)^2)(A^2+B^2)$$

- 但是，这中间还有一些不合法的光路（除起点和终点外光碰到格点）。
- 如果gcd(D+2-p，p)>1（不互质），那么这个光路是不合法的。

A. Bulbasaur and Laser

- Solution:
- 由更相减损术得知，上面的条件等价于gcd(D+2, p)>1，也就是说我们需要在答案的第一个因式中，扣掉所有符合条件的p^2.
- 这样，问题就变成了怎么求符合要求的p^2的和。

- 由于D ≤ 10^9，可知D+2的质因数不会太多（最多大概10个）。那么，我们把D的质因数求出来以后，用容斥原理就可以求得所有小于D+2，且与D+2不互质的奇数的平方和了。